

# 学校数学における問題解決の思考行動について

三 塚 正 臣

## On Thinking Behaviour of Problem Solving in School Mathematics

Naomi MITSUTSUKA

It is important for student to obtain mathematical thinking and mathematical ability. With these ideas in mind, we investigated thinking behaviour in problem solving. Therefore the structure of teaching materials, of teaching method in problem solving process were investigated. Further, mathematical thinking behaviour in problem solving were examined. These objective are to be set up systematically in relation to the ability of problem solving and the performance of mathematical thinking which student are expected to acquire. Therefore, this paper is trying to investigate the analyze the thinking behaviour in problem solving.

### 1. はじめに

学校数学においては、問題をどのように解決していくか、また、何を学びとるか主体的な学習方法を身につけなければならない。そのために、思考の方法をさぐらなければならない。

さきに、問題解決の一般的ストラテジーを分析し、一般的ストラテジーの構造をとらえた。思考は、数学的な考え方や一般的ストラテジーを意識的に用いることによって思考が促進される<sup>1)</sup>。

ここでは、思考の構造を関係の認識、判断の視点から考察し、関係の把握について追究した。さらに、問題解決における思考行動について、どのような思考行動がなされるかを追究し、問題解決における思考行動の因子を明らかにしようとした。さらに、思考行動と数学的な考え方や一般的ストラテジーとの関係を追究する。

### 2. 思考の構造について

課題に対してある種の困難さの緊張を解消させられない場面における精神的活動が思考である。精神的活動は、内面的に意識しながら働く活動である。精神的活動の手段のうちにも直接的一次的な遂行活動と間接的二次的な準備活動とが存在する。知識は種々なる関係をつくり、体系をつくり、そこに新たな性質が創造される可能性がある。

思考が成立するためには、まず、知覚を必要とする。知覚は一次的機能であり、思考は、その上にたつ二次的機能であると考え。思考活動の成立条件として欲求とともに状況の知覚が考え

られなければならない。知覚は受動的であり、思考は能動的である。知覚は事物の認識に対して思考は関係の認識である。知覚はその事態の認識を目標とし、思考はその事態をさらに加えて認識の目的に対して思考活動が触発される。思考成立の論理的前提は、課題状況の存在である。思考は、種々なる課題状況において触発されるものであるが、認識作用は、その課題状況の論理的関係の解明にむけられる。記憶と思考との関係は密接であるが、記憶は思考の条件であってそれ自身ではない。思考作用にとって重要なことは、知識体系である。

思考作用は、通例、概念、判断、推理の三機能に区分される。判断は、二つの概念の関係であり、推理はこのような判断の変形あるいはその結合である。思考は精神的活動の手段であり、しかも直接的な手段である動作が課題的緊張を解消せしめるに足りないときにおこる。このような活動は知的操作の順次的適用であり、あるいは、一種の洞察によって、このような既得の知的操作の中から特定の思考操作が予見され、選択される。前者は、試行錯誤的思考であり、後者は、洞察的思考である。試行錯誤的思考は失敗すれば、別の知的操作を求めると、結果による統制の法則であり、そのかぎりにおいては合目的行動である。この結果による統制の法則は実は思考活動の本質的原理であるといわれる<sup>2)</sup>。典型的な思考活動は、ある状況に対して既得の手段方法が失敗したとき、探索的活動として開始され、仮説がたてられ、思考活動がなされる。思考活動が成功すれば、直ちに遂行活動が触発される。それが成功しない場合には、再度、新たな探索的行動が開始される。これを思考実験というならば、思考実験は試行錯誤的なものである。そこには、特に中心転換、視点の転換がおこる。思考の転換は、思考がある方向に向けられた課題解決がゆきずまるとき、そこに思考の転換がおこり、思考の方向が転換される。思考の転換によって再構成された内容が既知の知識によってどのような内容が再構成され、数学的な考え方や一般的ストラテジーによって思考が促進され、解決にむかう思考の方向が見い出されるかをとらえなければならない。判断は、内容からみるときに、肯定判断と否定判断、分析判断と総合判断、概念的判断と対象的判断に分類することができる。シグワルトによれば、否定的判断は暫定的な判断であるといわれる。肯定判断にも単純な肯定判断と反省された肯定判断即ち承認の判断とに分れる。反省された判断は肯定判断であれ、否定された判断であれ、課題が困難な場合にあらわれる。第二の分類の視点は、新判断と再生判断、完全判断と省略判断、予備判断と最終的判断に分類される。思考の中心は判断であり、特に、分析判断、総合判断である。思考は、既知の知識と関連づけ、再構成された内容と内容との間の関係を中心転換をはかり、とらえなければならない。

### 3. 関係の把握について

思考活動は、概念あるいは、その意味を内容として、これらを結合する働きであると考えられる。困難に直面して、そのうちにおかれた緊張を解除すべく行動を開始するが、このような緊張解除に対する手段の発見が思考活動の機能に他ならない。

問題解決の思考活動の立場で考えるならば、これまでの知識やアルゴリズムによっては、解決できない問題場面に直面してどのように解決していくか、また、解決していこうかという緊張を

解除するために行動をおこすことを思考活動の機能と考える。

課題状況は、目的即ち緊張解除の視点において、漸次に分析され、その目的達成に対して本質的側面がみえたとき、その方向にむかって実際の行動が触発される。それには、問題場面の課題性を把握することであるが、それが目標に合致しているかどうかを探り、方法を考えながら行動することが思考行動である。課題状況の分析、さらに、問題の条件の構造の分析、どのような情報があるか、それらの情報を収集選択し、それが解決の視点にならないかどうかを追究する。これらの情報をもとにして、解決の視点をたてる。何が既知の関連した内容であるかを選択し、結合し、その結果、再構成された内容と内容との間にどのような関係が存在するか、観点を改めて考え、これらの内容と内容との間の相互関係を連鎖としてとらえていく。この過程において、数学的な考え方や一般的ストラテジーが結びついて思考が促進される。これらの相互関係において、類似性や、共通性、関連性をとらえていく。この過程において、中心をなすのは、本質的な関係の把握であり、判断である。関係というのは、全体的な課題状況が、その全体に対する関係を保ちながら分節するということであり、推理は、このような分節が段階をなして進展することに他ならない。つまり、課題状況が分節して、そこに緊張解除に対する本質的な側面を考察することである。

関係とは、1つの問題においていくつかの条件があるとき、その条件1つ1つを分析したとき、ある条件分析と他の条件分析との間になんらかのつながりがあると考え、そのつながりを関係という。しかして、再構成された内容と内容との間にある共通性、類似性、独自性をさぐり、新しい内容が見い出されるとき、関係があるという。この推論過程において、数学的な考え方や、数学的能力、ストラテジーが構成し、それらに存在する関係が論理的に正しいとき、関係が成立すると考えてよい。

関係の把握過程における判断は、そのカテゴリーから考え、肯定判断と否定判断、分析判断と総合判断、概念的判断と对象的判断に分類することができる。否定的な判断は、暫定的な判断といわれる。否定的判断は単純な否定判断と反省的な否定判断即ち拒否の判断にわけられる。肯定判断もまた単純な肯定判断と反省された肯定判断即ち承認の判断とにわけられる。反省的判断は否定判断、肯定的判断のいかんにかかわらず、課題が困難な場合にあらわれる。また、判断は、すべて全体表象の分析の結果によるものである。第二の分類は新判断と再生的判断、完全判断と省略判断、予備判断と最終的判断に分類される。

判断は、根拠にもとづいて結論づけられることである。肯定判断は次のような条件をみたした判断である。肯定判断がなされるときには、既知の内容と結びついて判断され、しかも、その判断は根拠にもとづいて論理的でなければならない。思考過程においては、部分的結論が得られることが多く、部分的結論の連鎖となって肯定判断がなされる。したがって、部分的結論は肯定判断で、部分的結論が部分的結論を生じ、その連鎖によって結論が導かれる。これらの過程においては数学的な考え方や数学的アイデア、一般的ストラテジーがどのように機能しているか追究しなければならない。部分的結論が構成されることは、このように、数学的な考え方や一般的スト

ラテジーが用いられ、数学的内容が再構成されることである。

全体的洞察に対してある事態がある特定の本質的構造に属する洞察は部分的洞察とよぶことができる。全体的洞察は論理的構造の洞察であるが、部分的洞察は因果的連関の洞察である。本質的構造をもとにして部分的に考えるならば、内容を解決することによって、一つの新しい視点が設定され、新しい側面から新しい方向が見直され、部分的洞察の結果として、新しく総合的判断がなされる。このことは、観点を変えることによって、新しく構造分析され、解釈することによって新しい考えが生じ、新しく総合的判断がなされる。このように、本質的構造を分析的に考え、部分的に洞察し、総合的判断がなされることによって、問題が解決される。

学校数学における関係の把握は、問題内容の本質的な部分は何か、その本質的構造はどういうことか、全体的にとらえたならば、問題内容の本質的構造をいくつかの部分にわけて、それらのことからどのようなことが洞察されるか、このことを部分的洞察というならば、部分的洞察においてかかわっている数学の特質から分析的判断や総合的判断がなされる。その過程においては、問題解決の構造分析とともに、数学的な考え方、数学的能力、一般的ストラテジーがもとになって本質的構造あるいは部分的構造が洞察される。

#### 4. 一般的ストラテジーについて

問題解決過程においては、内容の構造分析とともに、数学的な考え方や一般的ストラテジーを用いることによって、条件の構造が分析され、再構成された内容の相互関係を連鎖としてとらえることによって問題が解決される<sup>3)</sup>。問題解決におけるストラテジーは、解決の手順を示すストラテジーならびに解決過程の全般において用いられる一般的ストラテジー、補助的に用いられる補助的ストラテジーがある。ストラテジーは解決過程における認知パターンで、解決者が問題を追究していくなかで、解決の方法を意識的につかおうとするとき、その方法をストラテジーとよぶ。ストラテジーは単にあてはめただけでは解決の方向を見出すことはできない。ストラテジーの内容を解釈したり、ストラテジーの構造を分析してとらえ、その分析の結果が解決過程においてとらえなおされ、それを方法として用いることによって一般的ストラテジーのよさもわかり、解決の方向を見出したり、思考が促進され、問題の解決の構造がとらえられる。以下一般的ストラテジーについて要約して述べる。

##### (1) 「パターンをさぐる」ストラテジーの分析<sup>4)</sup>

パターンは帰納的に考えることによってさぐることができる。パターンは表においてだけでなく、その内容を図に表わし、表と図とを結びつけて、表においてとらえたパターンが図においてどのようなパターンであるかさらに図と図とを比較して構造的に相互関係をパターンとしてとらえることである。

##### (2) 「振り返って考える」ストラテジーの分析

振り返って考えるとは、一般的には、解決されたとき、解決過程を振り返り、より簡単な方法はないか、あるいは一般的な方法はないか、よりよい方法はないか、多様な考え方はないか

と考えるとともに、解決の方法を見なおすことによって、解決過程が一層明確にとらえられ、問題を解決する能力を豊かにする。解決過程においては、これまで考えなかったことや解決過程の共通性や類似性が再認識され、それによって、解決の構造や解決の方向がとらえなおされ、解決の方法を見出すのに有効である。

(3) 「複雑な問題を単純な問題の系列に分解する」ストラテジーの分析

複雑な問題は、その解決の本質にもとづいて、単純化した小問題の系列が存在する。このような小問題の系列を考え、その小問題の解決の構造をとらえ、複雑な本問題の解決とどのような相互の関係があるかをさぐることによって、本問題が解決される。即ち、小問題の解決の内容的な構造あるいはそこに考えられる数学的な考え方ならびに関連する数学的能力、ストラテジーがどのように機能しているかをとらえることによって小問題の構造をさぐり、複雑な問題の解決の構造とどのような相互関係があるかをさぐることによって解決できる。また、小問題の系列の間の相互関係は、問題の内容や解決するさいの思考の共通性・類似性と考えられる。また、系列化された小問題の間の共通性をとらえることが本問題の解決の構造をさぐるもとなる。

また、複雑な本問題の解決過程においては、解決の要となっている本質的な場がいくつかある。複雑な問題を解決するときには、解決の過程においていくつかの本質的な部分的な場において考えられる解決の方法をもとにして問題をつくることができる。このような小問題の系列をつくり、これらの系列化された小問題が解決されるならば、系列化された小問題の解決の方法が本問題の解決における本質的な問題場面の思考と結びつき、本問題が解決される。本問題の解決と部分的な小問題の解決の方法との関係は多様である。小問題の解決の方法が本問題の本質的な場の解決と結びつくほか、小問題の解決におけるアイデアが直接本問題に結びつく場合もあり、また、本問題の解決の契機となる場合もある。小問題には、本問題の考え方や全体の解決構造と同じような解決の構造をもった関連している下位レベルの小問題もある。

(4) 「思考内容の相互関係をとらえ、多様に考える」ストラテジーの分析

多様に考えるとは、解決にさいして、種々の観点を設け、観点を変えていく通りもの解決の方法を考えることである。したがって、いくつかの異なる観点によって解決にせまるので柔軟性が育成される。

視野のせまい固定的な考えによっては出あう問題を解決することにはならない。それには自由に考えることでなければならない。自由に考えることによって、解決過程においてはとらえられなかった観点を見出すことができるようになり、内容と内容との相互関係をもとらえられるようになる。

「自由に考える」ことを open thinking と名づけた。「自由」とは open (開いた) でなければならない。open thinking とは、ある一面の見方という閉鎖的な態度を排除して、自分が最初に考えたことにこだわらず、さらに観点を変えて考え、どのような結果になるのかという結果にこだわらず問わないという広い開いた考えによって推論する。このように、自由に考え

ていくなれば、次々と示唆が与えられ、解決が暗示される。つまり、open thinking とは、問題場面に直面したとき、自分が考えたことに固執せず、閉鎖的な態度を排除し、視点を変えて考える。また、直接役に立たないと思われる思考内容や不十分と思われる内容や一見とるにたらない内容について否定せず、自由に考えることである。このように自由に考えていくことによって考えを進めていくなれば、次々とアイデアが示唆され、新しい内容を考えることができ、内容と内容との間の相互関係がとらえられる。このようにして、未知の結果を発見することができ、このことがもとになって、次の結果を生み出すことになる。このことによって、多様な考えができるようになる。

多様に考え、種々の考えが得られたとしても、それらの考え方は無関係な別個の考えのようにとらえている。しかし、多様な考えには、相互に関係が存在すると考える。はじめの考え方1を振り返ってみたときに、設定した観点を見直していくなれば、その思考過程において、追究していく思考の異なった観点を見出すことができる。その思考の観点は、独立したものではない。その思考の本質的な部分の思考の観点を変更することによって考えていくなれば、新しいアイデアが生み出され、新しい考え方2が得られる。同様に考え方3を生み出すことができる<sup>5)</sup>。

#### (5) 「Back ward によって考える」ストラテジーの分析

証明においては、条件をもとにして、結論を導く Forward Reasoning による推論方法において思考が進展しない場合がある。このような困難に出あったとき、この結論がいえるためには何がとらえられればよいかと考える、これらの考えと条件をもとに、数学的な考え方や一般的ストラテジーを用いて、条件の構造を分析し、内容の相互関係と結びつけて思考し結論を導く。この考えが Back ward の第一の立場である。次に条件をもとにして、条件と条件との間の相互関係をとらえようとしても、見通しがたたない場合がある。この場合、Back ward の考えによって結論の内容を弱めるならば、問題は一層単純化される。この結論がわかるためには、何がわかればよいかと繰り返すことによって、問題は単純化された簡単なレベルの問題に再構成される。このようにして条件の内容に帰着し、証明の見通しがたてられる。これが Back ward の考えの第二の立場である。さらに、Back ward の考えの第三の立場が考えられる。条件をもとにして、ある過程まではとらえたが、困難に出あい、見通しがたたない場合、Back ward の考えを用いようとする。しかし、Back ward の考えのはじめの考えで、考えたことが条件をもとにして考えた内容と結びつかず推論が進まない場合がある。そこで、Back ward の考えではじめに考えた観点を変更し、新しい観点を設定し思考を進めるならば、条件をもとにして考えた内容と結びつき、証明が洞察される。このような考えが Back ward の考えの第三の立場である。思考過程において、既知の内容との関連づけ、あるいは内容の再構成、数学的な考え方や数学的能力、ストラテジーによって推論を進めていかなければならない。

これらの一般的ストラテジーの分析によって、問題の解決の構造が明らかになり、解決の方向も見い出される。これらの一般的ストラテジーのほかに「本質的なことをとらえる」「サブ

ゴールを考える」「類似の問題や関連した問題を考え、その解決の方法をもとにして考える」等のストラテジーがある。

## 5. 問題解決における思考行動について

学習問題においては内容を把握し、条件の構造分析として、単純化していくつかの系列に分解し、条件を既知の内容と結びつけ、条件を解決し、内容の再構成をはかる。その再構成された内容が妥当であるならば、その再構成された内容の間にどのような相互関係があるか追究することが考え方の方法である。これらの解決過程において数学的な考え方や数学的アイデア、一般的ストラテジーによって導かれた部分的結論やその部分的結論から生み出された新しい部分的結論や条件を結びつけ再構成し、その結果最終的判断に達する。これらは直接的遂行活動である。これらの直接的遂行活動は思考行動である。

思考はある課題に対して、ある種の困難さを解消しようとするときにおこる。つまり、解決しようとする意識が働いて、解決にむかって直接的な手段として具体的な行動がなされたとき思考行動といえる。具体的な行動とは、この問題を解決しようとしたとき、問題の内容と関連する既知の内容あるいは、一般的ストラテジーと結びついて具体的に行動する。さきに、精神的活動の手段として、直接的な1次的な遂行活動と間接的2次的な準備活動があるが、精神的活動は思考行動である。副次的な活動は、直接解決には結びつかないが、自由に考えることによって、獲得された副次的な間接的内容は次の思考においてそのことがもとになって新しい内容を見出したり証明に結びつく。したがって、open thinkingによって、副次的な間接的内容をとらえ、有機的に結合し、判断することによって洞察が可能となる。したがって自由に考える内容は副次的な活動であり準備活動であるが、その内容を選別し、直接解決に結びつくものを選び出すことになる。このことによって、その活動は直接的1次的な思考行動の遂行活動であるといえる。

証明問題における思考活動はこれらのことから推察される。

学習問題を解決するには、はじめに、条件を分析しなければならない。条件分析は、問題内容を図等によって示し、これによって問題内容が述べられ、問題の内容把握がなされる。このことは、補助的ストラテジーであり、思考行動の一つである。

問題を解決するには、条件の構造を分析しなければならない。条件の構造分析は、順次に条件を分析するならば既知の知識と結びついて思考が機能する。この場合には、既知の結果を構造的に把握しなければならない。既知の結果は、多様に考え、観点を交えて、条件の一部を変えたり逆命題をつくる、あるいは、既知の内容を構造的に考えることが必要で、それらのことによって問題が解決されたり、思考が促進されたりする。基本的内容を構造的に考えることも思考行動である。このようなことによって、部分的結論が得られ、部分的構造は次の思考のもとになる。したがって、その部分的結論から再構成された部分的結論、あるいは、部分的結論から生みだされた新しい部分的結論が条件、他の部分的結論と結びつき、どのような相互関係があるかを考え、解決される。このことは重要な思考行動である。問題を解決するさいに、条件を分析するととも

に、Back ward の考えも重要な思考行動である。そのことによって、解決の方向や解決の方法が洞察される。条件分析の結果と関連づけられ、相互関係がとらえられ、最終的判断に達する。これは、自由に思考することによって獲得され、見い出される。この思考過程においては、本質的なことをとらえる思考によって、非本質的な内容を捨象することによって部分図としてぬき出して考えることは、部分的結論が得られるので重要な思考行動と考えられる。この部分的結論をもとの図にもどし考えるならば、次の関係を見い出したり洞察するのに有効である。さらに、思考過程においては、観点を変えて、中心転換し、それによって解決される。このことによって、思考の方向が転換される。複雑な問題の場合には、単純化して、単純化されたいいくつかの系列に分け考えることも有効である。また内容を解釈したりすることも重要な思考行動である。

## 6. おわりに

学校数学における問題解決の思考行動について追究した。思考行動は、問解決の構造、ならびに、数学的なアイデア、数学的な考え方、問題解決における一般的ストラテジーを分析することによって、思考行動がとらえられる。思考行動は、多岐にわたるが、これらの思考行動が問題の内容の構造と有機的にかかわりあって思考が機能する。思考行動は、指導過程における下位目標の設定に寄与するが、これらをも含めて解明すべき問題点もあるが今後の研究に俟つこととする。

## 参 考 文 献

- 1) F. K. Lester ; Making Problem Solving Come Alive in the Intermediate Grades.  
National council of Teachers of Mathematics 1980 P.P.131-134.
- 2) 矢田部達郎 ; 思考心理学 P.P.15-32.
- 3) 三塚正臣 ; 学校数学における問題解決の構造について  
金沢大学教育学部教科教育研究第22号 1986. P.P.35-36.
- 4) 三塚正臣 ; 学校数学における問題解決の構造と方略との関係について  
金沢大学教育学部教科教育研究第24号 1988 P.P.215-217.
- 5) 三塚正臣 ; 学校数学における問題解決のストラテジーの分析について  
福井工業大学研究紀要第21号 1991 P.P.212-215.

(平成3年10月30日受理)